Informations : 8 questions ; 2.5 point par question. les points sont donnés si la réponse est juste précise et concise ; si la réponse comporte des phrases non pertinentes celles-ci ne sont pas prises en compte ; si une question ne paraît pas claire il faut la reformuler clairement (et écrire cette reformulation) avant de donner une réponse ; si l'utilisation d'autres notations que les officielles (celles que le texte introduit) s'avère nécessaire, il faut alors écrire la définition de ces nouvelles notations à partir des notations officielles avant de les utiliser.

Question 1

On donne l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$\frac{dx}{dt}(t) = a(t)\,x(t) + b(t) \quad ; \quad x(0) = x_0$$

où la fonction à calculer est $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et où x_0, $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des données.

On subdivise le temps en $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ et on appelle $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ les approximations de $x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_n), x(t_{n+1}), \ldots$ auxquelles conduisent les méthodes numériques qui vont être décrites.

a) Écrire l'algorithme correspondant à la méthode d'Euler explicite appliquée à l'EDO.

b) Écrire l'algorithme correspondant à la méthode d'Euler implicite appliquée à l'EDO.

c) Écrire l'algorithme correspondant à la méthode des 3/8 appliquée à l'EDO.

On donne le tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\
2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array}$$

d) Si on choisit $a(t) = -1/\tau$ et $b(t) = \sin(\omega\, t)$, donner une borne supérieure à ne pas dépasser pour le pas de temps en fonction de τ et ω.

Question 2

On donne maintenant

$$y(x) = \begin{cases} x - X & \text{si} \quad x < -X \\ 2\,x & \text{si} \quad -X \le x \le X \\ x + X & \text{si} \quad X < x \end{cases} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\Big(y(x(t))\Big) = a(t)\,x(t) + b(t) \quad ;$$

$$x(0) = x_0$$

où $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction à calculer ainsi que $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & z(t) = y(x(t)) \end{array}$

et où $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 sont des données.

e) La fonction $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y(x) \end{array}$ est-elle continue ? comment s'appelle une fonction ainsi définie ? Écrire la fonction $y^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & y^{-1}(u) \end{array}$ telle que

$$y^{-1}(y(x)) = x$$

f) Écrire l'équation différentielle pour laquelle z est la fonction à calculer.

g) On utilise la méthode d'Euler explicite, écrire

† l'algorithme général de résolution de cette équation différentielle

† en spécifiant soigneusement <u>tous</u> les aspects qui interviendraient lors de l'étape de programmation effective.

h) Refaire la question g avec la méthode des 3/8 plutôt qu'avec la méthode d'Euler.